UFF - Universidade Federal Fluminense
IME - Instituto de Matemática e Estatística
GGM - Departamento de Geometria
Disciplinas: GGM 00127, GGM 00125 , GGM 00160

5^a Lista de Exercícios - Conteúdo de Geometria Analítica Espacial

Retas, planos e esferas

AQUECIMENTO

1. Encontre a equação cartesiana do plano α nos seguintes casos:
   (a) α contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 0)$.
   (b) α contém o ponto $A = (1, 1, 1)$ e a reta
   $$r : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2t \\ z &= 0 \end{cases}$$
   (c) α contém os pontos $A = (1, -3, 1)$, $B = (1, 1, 5)$, $C = (-1, -2, 0)$.
   (d) α contém o ponto $A = (2, 3, 4)$ e é perdincular a reta
   $$r : \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= 1 + 3t \end{cases}$$
   (e) α contém os pontos $A = (1, -3, 1)$, $B = (3, -1, 3)$, $C = (0, -4, 0)$.
   (f) α contém os pontos $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\beta : 3x + 5y - 7z = 39$.
   (g) α contém os pontos $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 1, 3)$ e é perpendicular ao plano $\beta : x + y + z = 2$.

2. Encontre as equações paramétricas das retas r a seguir:
   (a) A reta r passa pelos pontos $(1, -1, 3)$ e $(2, 3, -5)$.
   (b) A reta r é a interseção dos planos $3x + y - z = 3$ e $x + y + z = 7$.
   (c) A reta r é perpendicular ao plano $2x - 3y + 4z = 0$ e passa pelo ponto $(1, 2, 3)$.
   (d) A reta r passa pelos pontos $(0, 1, -1)$ e $(1, 1, 2)$.

3. Verifique se as equações abaixo representam uma esfera. Caso afirmativo, determine o centro e raio.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y = 4$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 2y + \sqrt{5}z = -20$
   (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 4 = 0$

BÁSICO

1. Ache o ponto de interseção da reta r pelos pontos A e B com o plano α que tem $\vec{n}$ como vetor normal e passa pelo ponto C nos casos abaixo
   (a) $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 0, 0)$ e $\vec{n} = (2, 1, 3)$.
   (b) $A = (1, 0, 2)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (2, 1, 2)$ e $\vec{n} = (1, 1, 0)$.
   (c) $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (1, -1, 1)$ e $\vec{n} = (0, 3, 2)$.
   (d) $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 1, -2)$, $C = (-2, 3, -1)$ e $\vec{n} = (1, 1, -2)$.
   (e) $A = (1, -1, 1)$, $B = (-1, 2, -3)$, $C = (-2, 4, 3)$ e $\vec{n} = (2, 3, -3)$.

2. Ache a reta r que passa pela origem e é perpendicular ao plano α definido pelos pontos $A = (2, 3, 4)$, $B = (4, 5, 7)$ e $C = (3, 3, 3)$.

3. Do ponto $(5, 4, -7)$ é traçada uma reta perpendicular a um plano. Se o pé desta perpendicular é o ponto $(2, 2, -1)$, encontre a equação do plano.

4. Descreva a reta r que é perpendicular aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 3, 4)$ e passa pelo ponto $A = (3, 4, 5)$.

5. Ache o ponto P que pertence a reta l por $(1, 2, -4)$ e $(0, 1, 0)$ e ao plano α por $(2, 3, -1)$, $(2, 5, 7)$ e $(3, 1, 0)$.

6. Mostre que o plano $Ax + By + Cz + D = 0$ será paralelo ao eixo OX se, e somente se, $A = 0$. Conclua fatos similares para os casos $B = 0$ e $C = 0$.

7. Verifique se os seguintes ternos de planos se interseptam segundo um ponto. Em caso afirmativo, ache as coordenadas deste ponto
   (a) $2x + y + z = 1$, $x + 3y + z = 2$, $x + y + 4z = 3$.
   (b) $x - 2y + z = 0$, $2x - 4y + 2z = 1$, $x + y = 0$.
   (c) $3x + 2y - z = 8$, $2x - 5y + 2z = -3$, $x - y + z = 1$.

1. Sejam $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (1, 1, 0)$, seja α_1 o plano por A, B e C. Seja l a reta por A perpendicular a α.
   (a) Ache uma equação para a reta l.
   (b) Ache as coordenadas dos dois pontos D_1 e D_2 de l, tal que $\overline{D_1A} = \overline{D_2A} = \overline{BA}$.

2. Determine a equação da esfera que passa pelos três pontos $A = (3, 1, -3)$, $B = (-2, 4, 1)$ e $C = (-5, 0, 0)$, com centro no plano $2x + y - z + 3 = 0$.

3. Encontre o ponto simétrico Q do ponto $P = (4, 1, 6)$ em relação a reta
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

4. Encontre o ponto simétrico Q do ponto $P = (1, 3, -4)$ em relação ao plano $3x + y - 2z = 0$.

5. Para que valores A e D a reta
$$\begin{cases} x &= 3 + 4t \\ y &= 1 - 4t \\ z &= -3 + t \end{cases}$$
pertence ao plano $Ax + 2y - 4z + D = 0$.

6. Determine os planos tangentes à esfera $S : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 6$ que são perpendiculares à reta $r : \frac{x-1}{2} = y = z - 1$.

7. Obter as equações cartesianas dos planos paralelos a $\Pi_1 : x + y - 2z - 4 = 0$ que são tangentes ‘esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 8 = 0$.

8. Determine as equações das esferas de raio 3 que são tangentes ao plano $\Pi : x + 2y + 2z = -3$ no ponto $P = (1, 1, -3)$.

9. Obtenha a equação cartesiana do plano que contém a reta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 6y + 3z - 49 = 0 \end{cases}$ e é tangente à esfera S de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 7.

10. A interseção de uma esfera S com o plano Π_{XY} é a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$. Se $(3, 4, 2) \in S$, determine a equação de S.

11. Mostre que a reta $r = \{(4t + 4, 3t + 1, t + 1);\ t \in \mathbb{R}\}$ é tangente à esfera $S : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 3$ e determine a equação do plano tangente à esfera S que contém r.

12. Considere a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0$ e o plano $\Pi : 5x + 2y - z = 3$. Mostre que $S \cap \Pi$ é uma circunferência e determine seu raio e centro.

13. Os pontos $A = (3, -2, 5)$ e $B = (-1, 6, -3)$ são as extremidades de um diâmetro da circunferência $\mathcal{C}$ que passa pelo ponto $D = (1, -4, 1)$. Determine o centro e o raio de $\mathcal{C}$, e o plano no qual $\mathcal{C}$ está contida.

14. Determine os valores máximo e mínimo atingidos pela expressão $x - 2y + z$, quando (x, y, z) percorre a superfície esférica $S : x^2 + y^2 + z^2 = 6$.